De Principio Integrationis Functionum Differentialium, Unius Quantitatis Variabilis, Algebraicæ.

Disquisitio Mathematica,

Quam,

Consent. Ampliss. Ord. Philos. Lundens.

P. P.

P. S. MUNCK AF ROSENSCHÖLD,

Phys. Adj. Ord.

Respondente

PETRO JOHANNE ENGSTRÖM,

Scano.

In Acad. Carol. Die XXIX Nov. MDCCCXLIII.

P. IV.

LUNDÆ,

typis Berlingianis,

MDCCCXLIII.

Theses Respondentis.

I.

In donis hominibus a Deo concessis, quæ in quoque vitæ statu solatium afferunt maximum, est *spes* certissime numeranda.

II.

Gentes antiquitatis fere omnes *fortitudinem* cum *honestate* permiscuisse, statuere licet.

Consideremus primo casum, quando est $a' = o$. Æquatio nostra tunc reducitur in

$$v + \frac{(a+bx^n)x^{r+1}}{b(r+n(p+1))\,x^{r+n} + r\,a\,x^r}\, v' = \frac{x^m}{b(r+n(p+1))\,x^{r+n} + r\,a\,x^r}.$$

Ut jam sit $\frac{x^m}{b(r+n(p+1))\,x^{r+n} + r\,a\,x^r}$ constans, necessario erit

$b(r+n(p+1))\,x^{r+n} = 0$, et $x^m = x^r$ h. e. $m = r$. Quoniam autem $b(r+n(p+1))\,x^{r+n}$ variabilem x continet, modo generali zero esse non potest, nisi sit factor constans nihilo æqualis. Oritur igitur æquatio $r+n(p+1) = 0$, unde $r = -n(p+1)$. Est autem $r = m$, ideoque $m = -n(p+1)$ vel $\frac{m}{n} + p = -1$. Facile apparet hoc tantummodo esse casum specialem conditionis jam p. 11 allatæ, ut sit $-\frac{m}{n} - p$ numerus integer positivus. Nil novi igitur continet. Conditione nuper allata expleta, obtinetur $v = \frac{1}{ra} = \frac{1}{ma}$. Si exempli gratia esset $m = 1$, $n = 2$, $p = -\frac{3}{2}$, erit $\frac{m}{n} + p = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$. Hinc sequitur esse $v = \frac{1}{a}$ et $u = x(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}$, unde eruitur

$$\int \frac{dx}{(a+b\,x^2)\sqrt{(a+b\,x^2)}} = \frac{x}{a\sqrt{(a+b\,x^2)}} + C.$$

Hoc idem obtinetur si integrale secundum methodum p. 11 quæritur.

Præter modum jam allatum, $\frac{x^m}{b(r+n(p+1))\,x^{r+n} + r\,a\,x^r}$ nullo alio modo constans fieri potest. Nam $r\,a\,x^r$ nihilo æquale esse non potest, nisi

sit vel r vel a zero, et duo termini denominatoris in unum conjungi non possunt, nisi sit $r+n=r$, h. e. $n=0$, quod est contra hypothesin.

Ponatur jam a' non esse zero. Ut in hoc casu, existentibus tribus terminis in denominatore, sit membrum posterius æquationis constans, necesse est primum duos in unum conjungere. Nam rax^r zero fieri non potest, et si ponimus $b(r+n(p+1))x^{r+n}=0$, $n(p+1)a'bx^n$ in nihilum verti non potest, nisi $r=0$, quod est contra hypothesin. Sed $b(r+n(p+1))x^{r+n}$ neque cum rax^r neque cum $n(p+1)a'bx^n$ conjungi potest, nam tunc esset vel n vel r zero, contr. hyp. Restat igitur tantummodo rax^r et $n(p+1)a'bx^n$ conjungere, quod quidem fieri potest si $r=n$, unde

$Q=\dfrac{x^m}{b(r+n(p+1))x^{2n}+(ra+n(p+1))a'b)x^n}$. Jam Q duobus modis constans erit, alteruter enim ex duobus terminis denominatoris in nihilum verti potest.

Ponatur primo $ra+n(p+1)a'b=0$ et $m=2n$. Quoniam $r=n$, æquatio prima erit $na+n(p+1)a'b=0$, vel diviso per n, $a+(p+1)a'b=0$, unde deducitur $a'=-\dfrac{a}{(p+1)b}$. Hinc apparet unicam tantummodo existere conditionem inter quantitates differentialis propositi, nempe hæc $m=2n$, quæ quidem tantummodo est casus specialis conditionis p. 11 allatæ, scilicet $\dfrac{m}{n}$ æquale numero integro affirmativo. Sit $n=2$, $m=4$, unde $m=2n$. Si jam ponitur $a'=-\dfrac{a}{(p+1)b}$, erit Q constans et

$v=\dfrac{1}{b(r+n(p+1))}=\dfrac{1}{nb(p+2)}$. Quoniam jam est $u=$

$\left(x^2-\dfrac{a}{(p+1)b}\right)(a+bx^2)^{p+1}$, erit, reductionibus factis,

$$\int x^3(a+bx^2)^p\,dx = \frac{((p+1)bx^2-a)(a+bx^2)^{p+1}}{n(p+1)(p+2)b^2} + C.$$

Idem modo p. 11 allato obtinetur.

Ponatur secundo $r+n(p+1)=0$ et $m=n$. Quoniam $r=n$, erit $n+n(p+1)=0$ vel $1+p+1=0$, unde $p=-2$. Duæ igitur conditiones necessariæ sunt si Q constans reddatur, nempe $m=n$ et $p=-2$. His expletis erit $v=\frac{1}{n(a-a'b)}$. Quoniam a' in hoc casu indeterminatum reliquitur, unumquemque valorem induere potest, modo non sit $a-a'b=0$. Si igitur simplicitatis caussa ponatur $a'=0$, erit $v=\frac{1}{na}$ et $u=x^n(a+bx^n)^{-1}$. Hinc concludimus esse

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{(a+bx^n)^2} = \frac{x^n}{na(a+bx^n)} + C.$$

Si idem integrale secundum p. 11 quærimus, obtinetur $-\frac{1}{nb(a+bx^n)}+C.$ Quando igitur nuper obtinuimus valorem specialem -2 pro p, hoc indicat integrale $\int x^{n-1}(a+bx^n)^p dx$ duobus modis exprimi posse, si $p=-2$. Hoc etiam ex eo manifestum est, quod tunc erunt ambæ conditiones expletæ. Est enim et $\frac{m}{n}=1$, et $-\frac{m}{n}-p=1$.

Jam ponimus generaliter

$$u=(x^r+a'x^{r'}+a''x^{r''}+\ldots\ldots+a'^s)(a+bx^n)^{p+1}$$

Quoniam tantummodo quæstio est Q constans reddendi, opus non est æquationem integram quærere. Ex iis quæ jam p. 11 attulimus, difficile non erit ipsum Q determinare. Opus tantummodo est r successive in $r', r''\ldots$ mutare et per $a', a''\ldots$ multiplicare. Denique mutetur a' in a'^s Hoc modo concludimus esse $Q=x^m$ divisum per

$$b(r+n(p+1))x^{r+n}+ba'(r'+n(p+1))x^{r'+n}+ba''(r''+n(p+1))x^{r''+n}+\ldots\ldots$$
$$+rax^{r}+aa'r'x^{r'}+aa''r''x^{r''}\ldots\ldots+a'^{s}bn(p+1)x^{n}.$$

Apparet terminos denominatoris in tres classes dividi. In prima classe variabilis x exponentes habet $r+n$, $r'+n$ .... et in secunda r, r' ..... Tertia classis ex uno eodemque termino $a'^{s}bn(p+1)x^{n}$, consistit, in quo occurit exponens n. Facile apparet neque terminos primæ neque secundæ classis inter se conjungi posse. Nam si $b(r+n(p+1)x^{r+n}$ cum $ba'(r'+n(p+1))x^{r'+n}$ conjungere vellemus, foret $r+n=r'+n$, vel $r=r'$, et si rax^{r} et $aa'r'x^{r'}$ conjungerentur, foret etiam $r=r'$, quod est contra hypothesin. Similiter terminus primæ classis cum ultimo $a'^{s}bn(p+1)x^{n}$ conjungi non potest, nam si esset $r+n=n$, foret $r=0$. Necessario igitur termini primæ classis cum terminis secundæ conjungantur.

Ponamus primum terminos primæ et secundæ classis tantummodo esse tres. Mox apparet primum terminum primæ classis cum primo secundæ conjungi non posse. Nam si ponimus $r+n=r$, foret $n=0$ contr. hyp. Conjungatur itaque $b(r+n(p+1))x^{r+n}$ cum $aa'r'x^{r'}$ et $ba'(r'+n(p+1))x^{r'+n}$ cum $aa''r''x^{r''}$. Erit igitur

$$r+n=r', \qquad r'+n=r''$$

Jam terminus tertius primæ classis $ba''(r''+n(p+1))x^{r''+n}$ cum primo secundæ rax^{r} conjungi non potest, nam si ponimus $r''+n=r$, et valor ipsius r in prima æquatione $r+n=r'$ introducitur, obtinetur $r'=r''+2n$. Secunda autem æquatio dat $r'=r''-n$, unde $2n=-n$ vel $n=0$ contr. hyp. Necessario igitur arx^{r} cum ultimo termino $a'^{s}bn(p+1)x^{n}$ conjungatur, unde conditio tertia provenit

$$r=n.$$

Jam ex æquatione prima obtinetur $r'=2n$, et hoc valore in secunda introducto, erit $r''=3n$, unde apparet exponentes ipsius x in u fieri

$$r=n, \quad r'=2n, \quad r''=3n.$$